Université Mentouri **Département SETI et LMD**

MIAS (Algèbre1)

Contrôle (février 2008)

Exercice1 (3points)

Dresser la table d'addition et la table de multiplication dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\ \bar{5}\}$ et relever dans chacune d'elle, les éléments non symétrisables.

Exercice2 (3 points)

Soit f une application injective de E dans E et soit A une partie de E, montrer que :

$$f^{-1}(f(A)) = A$$

Exercice 3 (8 points)

Sur IR, on considère la loi T définie par :

$$(\forall x, y \in IR) \qquad xTy = xy + k(x+y) + k(k-1) \qquad (k \in IR)$$

1) montrer que :
   a) T est associative
   b) Il existe un élément neutre
2) quels sont les éléments symétrisables ? Calculer $x\,T\,(-k)$
3) pour $k = 2$, calculer :

$$x'\,T\,x'\,T\ldots T\,x' \quad (n \text{ fois})$$

où x' est un symétrique de x.

Exercice4 (6 points)

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne T associative et soit a un élément de E tel que les applications :

$$\gamma_a : E \to E \qquad \wedge \qquad \delta_a : E \to E$$
$$x \mapsto aTx \qquad\qquad x \mapsto xTa$$

sont surjectives

On suppose qu'il existe $u, v \in E$ tels que :

$$uTa = a \qquad \wedge \qquad aTv = a$$

Montrer que :

1) $(\forall y \in E) \qquad uTy = y \quad \wedge \quad yTv = y$
2) L'élément neutre existe
3) a est symétrisable

Indication : comme les 2 applications sont surjectives on a :

$$(\forall y \in E)(\exists x_1, x_2 \in E) \quad \gamma_a(x_1) = y \quad \wedge \quad \delta_a(x_2) = y$$

امتحان

تمرين1

أنشئ جدول الجمع و جدول الضرب في المجموعة $Z/_{6Z} = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\,\bar{5}\}$

و عين العناصر الغير قابلة للتنظير

تمرين 2

ليكون f تطبيق غامر من E في E و ليكون B جزء من E برهن على

$$f(f^{-1}(B)) = B$$

تمرين 3

على IR نعرف العملية T ب :

$$(\forall x, y \in IR) \qquad xTy = \frac{1}{k}xy + 2(x+y+k) \qquad (k \in IR^*)$$

1)برهن على أن

- العملية تجميعية
- العنصر الحيادي موجود

2) اوجد العناصر القابلة للتنظير و لحسب $(-2k)\ T\ x$

3) نضع $k = -1$ لحسب

$$x'\,T\,x'\,T\ldots T\,x' \quad (n \text{ fois})$$

حيث x' هو نظيرx.

تمرين 4

لتكون المجموعة E المزودة بالعملية التجميعية T و ليكون b عنصر من E حيث التطبيقان :

$$\begin{array}{ll} \gamma_b : E \to E & \wedge \qquad \delta_b : E \to E \\ x \mapsto bTx & \qquad\quad x \mapsto xTb \end{array}$$

غامران.

نفرض انه يوجد $u, v \in E$ بحيث $bTv = b \quad \wedge \quad uTb = b$

برهن على

1. $yTv = y \quad \wedge \quad uTy = y \qquad (\forall y \in E)$
2. العنصر الحيادي موجود
3. العنصر b قابل للتنظير

ملاحضة : بما أن التطبيقان غامران فان

$$(\forall y \in E)\,(\exists x_1, x_2 \in E) \quad \gamma_b(x_1) = y \quad \wedge \quad \delta_b(x_2) = y$$

Correction

Exo1

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

×	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Comme on le constate sur les 2 tableaux, tous les éléments sont symétrisables pour l'addition, par contre, les éléments 0, 2,3,4 ie les éléments qui ne sont pas premiers avec 6, ne sont pas inversibles.

Exo2

$$f^{-1}(f(A)) = A \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(f(A)) \subset A \ \wedge \ A \subset f^{-1}(f(A))$$

$\subset$ / Soit $x \in E$,

$x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(A))$

$\supset$ /

$x \in f^{-1}(f(A)) \Rightarrow f(x) \in f(A) \Rightarrow (\exists\ x' \in A)\, f(x') = f(x)$, et comme f est injective

$f(x') = f(x) \ \Rightarrow x = x'$ et ainsi, $x \in A$

Exo3

$$(\forall x, y \in IR) \qquad xTy = xy + k(x+y) + k(k-1) \qquad (k \in IR)$$

1 - a) associativité

Soient x, y, z trois éléments arbitraires de IR.

(i) $\quad (xTy)Tz = (xTy)z + k(xTy) + kz + k(k-1)$

$$= (xy + kx + ky + k(k-1))z + k(xy + kx + ky + k(k-1)) + kz + k(k-1)$$
$$= xyz + k(xz + yz + xy) + k^2(z + x + y) - kz + kz + k^2(k+1) + k(k-1)$$
$$= xyz + k(xz + yz + xy) + k^2(z + x + y) + k(k+1)(k-1)$$

(ii) $\quad xT(yTz) = x(yTz) + kx + k(yTz) + k(k-1)$

$$= x(yz + ky + kz + k(k-1)) + kx + k(yz + ky + kz + k(k-1)) + k(k-1)$$
$$= xyz + k(xy + xz + yz) + k^2(z + x + y) - kx + kx + k^2(k+1) + k(k-1)$$
$$= xyz + k(xz + yz + xy) + k^2(z + x + y) + k(k+1)(k-1)$$

$(i) = (ii)$, la loi est associative

- b) Elément neutre

La loi étant commutative (évident), si e existe, il est tel que :

$$(P) \qquad (\forall x) \qquad xTe = x$$

$$(P) \Leftrightarrow (\forall x)\ xe + kx + ke + k(k-1) = x \Leftrightarrow (\forall x)\ \ x(e+k-1) + (ke + k(k-1)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e + k - 1 = 0 \\ k(e + k - 1) = 0 \end{cases}$$

(un polynôme est identique à 0 si chacun de ses coefficients est nul) et ainsi :

$$\boxed{e = 1 - k}$$

2) - Eléments symétrisables

Si x' existe, il est tel que :

$$xTx' = e \Leftrightarrow xx' + kx + kx' + k(k-1) = 1 - k$$

$$\Leftrightarrow x'(x+k) = 1 - k + k(1-k) - kx$$

$$\Leftrightarrow \quad x' = \frac{(1-k^2) - kx}{k+x} \qquad (x \neq -k)$$

L'élément (-k) n'est pas symétrisable et l'on a : $xT(-k) = -k$; c'est donc un élément absorbant.

3) pour $k = 2$, $\quad x'Tx' = x'^2 + 4x' + 2 = (x'^2 + 4x' + 4) - 2 = (x'+2)^2 - 2$

On suppose que $\quad \underbrace{x'Tx'T\cdots Tx'}_{n \text{ fois}} = (x'+2)^n - 2 \quad$ dans ce cas :

$$\underbrace{x'Tx'T\cdots Tx'}_{n+1 \text{ fois}} = (\underbrace{x'T\cdots Tx'}_{n \text{ fois}})Tx' = \left((x'+2)^n - 2\right)x' + 2\left((x'+2)^n - 2\right) + 2x' + 2$$

$$= (x'+2)^n x' + 2(x'+2)^n - 2x' + 2x' - 4 + 2$$

$$= (x'+2)^n (x'+2) - 2 = (x'+2)^{n+1} - 2$$

Et ainsi,

$$\underbrace{x'Tx'T\cdots Tx'}_{n \text{ fois}} = (x'+2)^n - 2 = \left(\frac{(1-4) - 2x}{2+x} + 2\right)^n - 2$$

$$= \left(\frac{-3 - 2x + 4 + 2x}{2+x}\right)^n - 2 = \frac{1}{(2+x)^n} - 2 \qquad (x \neq -2)$$

Exo4

1. il existe $u, v \in E$ tels que : (1) $\quad uTa = a \quad \wedge \quad$ (2) $\quad aTv = a$ et comme les 2 applications sont surjectives on a : $(\forall y \in E)\, (\exists x_1, x_2 \in E) \quad \gamma_a(x_1) = y \quad \wedge \quad \delta_a(x_2) = y$ et donc :

$$(\forall y \in E) \quad \begin{cases} uTy = uT(\gamma_a(x_1)) = uT(aTx_1) \underset{T \text{ ass}}{=} (uTa)Tx_1 \overset{(1)}{=} aTx_1 = y \quad \cdots (i) \\ yTv = (x_2Ta)Tv = x_2T(aTv) \overset{(2)}{=} x_2Ta = y \quad \cdots \quad (ii) \end{cases}$$

2. les propositions (i) et (ii) précédentes signifient que u est élément neutre à gauche et que v est élément neutre à droite, il suffit donc d'établir : $u = v$.
   Or, $uTv = v$ d'après (i) et $\quad uTv = u$ d'après (ii)
3. les applications γ_a et δ_a, il existe a' et a'' tels que : $\gamma_a(a') = u$ et $\delta_a(a'') = u$, càd $\quad aTa' = u$ et $a''Ta = u$, u étant l'élément neutre, a' et a'' sont donc symétriques de a l'un à gauche et l'autre à droite.
   D'autre part, on a :
   $a''TaTa' = (a''Ta)Ta' = uTa' = a' \quad \wedge \quad a''TaTa' = a''T(aTa') = a''Tu = a'' \Rightarrow a' = a''$