Université Mentouri

Département SETI et LMD

MIAS (Algèbre1)

Contrôle (fév. 2008)

Exercice1 (3points)

Dresser la table d'addition et la table de multiplication dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ et relever dans chacune d'elle, les éléments non symétrisables.

Exercice2 (3 points)

Soit f une application surjective de E dans E et soit B une partie de E, montrer que :

$$f(f^{-1}(B)) = B$$

Exercice 3 (8 points)

Sur IR, on considère la loi T définie par :

$$(\forall x, y \in IR) \qquad xTy = \frac{1}{k}xy + 2(x + y + k) \qquad (k \in IR^*)$$

1) montrer que :
   a) T est associative
   b) Il existe un élément neutre
2) quels sont les éléments symétrisables ? Calculer $x\,T\,(-2k)$
3) pour $k = -1$, calculer :

$$x'\,T\,x'\,T \ldots T\,x' \quad (n \text{ fois})$$

où x' est un symétrique de x.

Exercice4 (6 points)

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne T associative et soit b un élément de E tel que les applications :

$$\gamma_b : E \to E \qquad \wedge \qquad \delta_b : E \to E$$
$$x \mapsto bTx \qquad\qquad\qquad x \mapsto xTb$$

sont surjectives

On suppose qu'il existe $u, v \in E$ tels que :

$$uTb = b \qquad \wedge \qquad bTv = b$$

Montrer que :

1) $(\forall y \in E) \qquad uTy = y \quad \wedge \quad yTv = y$
2) L'élément neutre existe
3) b est symétrisable

Indication : comme les 2 applications sont surjectives on a :

$$(\forall y \in E)\,(\exists x_1, x_2 \in E) \quad \gamma_b(x_1) = y \quad \wedge \quad \delta_b(x_2) = y$$

امتحان

تمرين1

أنشئ جدول الجمع و جدول الضرب في المجموعة $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\ \bar{5}\}$

و عين العناصر الغير قابلة للتنظير

تمرين 2

ليكون f تطبيق متباين من E في E و ليكون A جزء من E برهن على

$$f^{-1}(f(A)) = A$$

تمرين 3

على IR نعرف العملية T ب :

$$(\forall x, y \in IR) \qquad xTy = xy + k(x+y) + k(k-1) \qquad (k \in IR)$$

1) برهن على أن

- العملية تجميعية
- العنصر الحيادي موجود

2) اوجد العناصر القابلة للتنظير و احسب $(-k)\ T\ x$

3) نضع $k = 2$ احسب

- $x'\ T\ x'\ T \ldots T\ x'$ (n fois)

حيث x' هو نظيرx

تمرين 4

لتكون المجموعة E المزودة بالعملية التجميعية T و ليكون a عنصر من E حيث التطبيقان :

$$\gamma_a : E \to E \qquad \wedge \qquad \delta_a : E \to E$$
$$x \mapsto aTx \qquad\qquad\qquad x \mapsto xTa$$

غامران .

نفرض انه يوجد $u, v \in E$ بحيث $aTv = a \quad \wedge \quad uTa = a$

برهن على

1. $yTv = y \quad \wedge \quad uTy = y \qquad (\forall y \in E)$
2. العنصر الحيادي موجود
3. العنصر a قابل للتنظير

ملاحظة : بما ان التطبيقان غامران فان

$$(\forall y \in E)\ (\exists x_1, x_2 \in E) \quad \gamma_a(x_1) = y \quad \wedge \quad \delta_a(x_2) = y$$

Correction (contrôle bis)

Exo2

$$f(f^{-1}(B)) = B \Leftrightarrow f(f^{-1}(B)) \subset A \wedge A \subset f(f^{-1}(B))$$

$\subset$ / Soit $y \in E$,

$$y \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow (\exists x \in f^{-1}(B))\ y = f(x)$$
$$x \in f^{-1}(B) \Rightarrow f(x) \in B \Rightarrow y = f(x) \in B$$

$\supset$ /

$y \in B \Rightarrow (\exists x \in f^{-1}(B))\ y = f(x)$ (surjection de f)

$x \in f^{-1}(B) \Rightarrow y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$

Exo3

$$(\forall x, y \in IR) \qquad xTy = \frac{1}{k}xy + 2(x + y + k) \qquad (k \in IR^*)$$

1 - a) associativité

Soient x, y, z trois éléments arbitraires de IR,

(i)
$$(xTy)Tz = \frac{1}{k}(xTy)z + 2(xTy) + 2z + 2k$$
$$= \frac{1}{k}(\frac{1}{k}xy + 2x + 2y + 2k)z + 2(\frac{1}{k}xy + 2x + 2y + 2k) + 2z + 2k$$
$$= \frac{1}{k^2}xyz + \frac{2}{k}(xz + yz + xy) + 4(x + y + z) + 6k$$

(ii)
$$xT(yTz) = \frac{1}{k}x(yTz) + 2x + 2(yTz) + 2k$$
$$= \frac{1}{k}x(\frac{1}{k}yz + 2y + 2z + 2k) + 2x + 2(\frac{1}{k}yz + 2y + 2z + 2k) + 2k$$
$$= \frac{1}{k^2}xyz + \frac{2}{k}(xy + xz + yz) + 4(z + x + y) + 6k$$

$(i) = (ii)$, la loi est associative

- b) Elément neutre

La loi étant commutative (évident), si e existe, il est tel que :

$$(P) \qquad (\forall x) \qquad xTe = x$$

$$(P) \Leftrightarrow (\forall x)\ \frac{1}{k}xe + 2x + 2e + 2k = x \Leftrightarrow (\forall x)\ \ x(\frac{1}{k}e + 1) + 2(e + k) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{k}e + 1 = 0 \\ 2(e + k) = 0 \end{cases}$$

(Un polynôme est identique à 0 si chacun de ses coefficients est nul) et ainsi :

$$\boxed{e = -k}$$

2) - Eléments symétrisables

Si x' existe, il est tel que :

$$xTx' = e \Leftrightarrow \frac{1}{k}xx' + 2x + 2x' + 2k = -k$$

$$\Leftrightarrow x'(\frac{1}{k}x + 2) = -3k - 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad x' = \frac{-(3k+2x)k}{2k+x} = -2k + \frac{k^2}{2k+x} \qquad (x \neq -2k)$$

L'élément (*-2k*) n'est pas symétrisable et l'on a : *x T (-2k) = - 2k* ; c'est donc un élément absorbant.

3) **pour** $k = -1$, $\quad x'Tx' = -x'^2 + 4x' - 2 = -(x'^2 - 4x' + 4) + 2 = -(x'-2)^2 + 2$

On suppose que $\quad \underbrace{x'Tx'T\cdots Tx'}_{n \text{ fois}} = -(x'-2)^n + 2$ **dans ce cas :**

$$\underbrace{x'Tx'T\cdots Tx'}_{n+1 \text{ fois}} = (\underbrace{x'T\cdots Tx'}_{n \text{ fois}})Tx' = \frac{1}{-1}\left(-(x'-2)^n + 2\right)x' + 2\left(-(x'-2)^n + 2\right) + 2x' - 2$$

$$= -(x'-2)^n(x'-2) - 2x' + 2x' + 4 - 2$$

$$= -(x'-2)^n(x'-2) + 2 = -(x'-2)^{n+1} + 2$$